1. Pirmasis skaičių sekos narys yra 7, o kiekvienas kitas narys, pradedant antruoju, lygus prieš jį esančio skaičiaus kvadrato skaitmenų sumai, padidintai 1.
Raskite 1990[*]–ąjį šios sekos narį.

Sprendimas. Parašykime pirmuosius sekos narius: 7, 14, 17, 20, 5, 8, 11, 5, 8, ... Pastebime, kad nuo penktojo sekos nario, skaičių trejetas 5, 8, 11 kartojasi. Atmetus pirmuosius keturis sekos narius, gautoje periodinėje sekoje:

- su kiekvienu sveikuoju $k \geq 0$, $(3k + 1)$-oje vietoje bus skaičius 5;
- su kiekvienu sveikuoju $k \geq 0$, $(3k + 2)$-oje vietoje bus skaičius 8;
- su kiekvienu natūraliuoju $k \geq 1$, $3k$-oje vietoje bus skaičius 11.

Kadangi 1990 – 4 = 1986, o 1986 = 3 * 662, tai 1990-oje vietoje yra skaičius 11.

Atsakymas: 1990-asis sekos narys yra 11.

---

2. Nedaugindami ir nekeldami laipsniu, palyginkite skaičius

$$\mathbf{923654781 \cdot 923654783 \text{ ir } 923654782^2.}$$

Rezultatą pagrįskite.

Sprendimas. Pasinaudosime nelygybe: $(x-1)(x+1) = x^2 - 1 < x^2$.

Tegul $x = 923654782$. Vadinasi,

$$(923654782 - 1) \cdot (923654782 + 1) = 923654782^2 - 1 < 923654782^2.$$

Atsakymas: $923654781 \cdot 923654783 < 923654782^2$.

---

3. Raskite skaitmenis x, y, z, su kuriais teisinga lygybė $\overline{x5} \cdot \overline{3yz} = 7850$.

Sprendimas. Išreikškime $\overline{x5} = \frac{7850}{\overline{3yz}}$. Jei 7850 padalinsime iš mažiausio galimo skaičiaus $\overline{3yz}$, gausime, jog:

$$\overline{x5} \leq \frac{7850}{300} = 26\frac{1}{6}.$$

Taigi, $\overline{x5} < 26$. Vadinasi, $x = 1$ arba $x = 2$.

Jei $x = 1$, tai $\overline{x5} = 15$; tačiau 7850 nesidalina iš 15 (be liekanos). Vadinasi, $x = 1$ netinka.

Jei $x = 2$, tai $\overline{x5} = 25$; tuomet $\frac{7850}{25} = 314$.

Atsakymas: $x = 2, y = 1, z = 4$.

[*] Skaičius, skirtas Lietuvos nepriklausomybės atkūrimo dienai (1990.03.11) paminėti.

4. Dviejuose induose yra po 100 gramų skirtingos koncentracijos tos pačios medžiagos tirpalai: viename inde 5% koncentracijos, kitame – 40%. Po kiek gramų tirpalo reikia paimti iš kiekvieno indo, norint gauti 140 gramų 30% tirpalo?

Sprendimas. Tarkime, paimta x gramų 5% koncentracijos tirpalo ir y gramų – 40% koncentracijos tirpalo. Sudarome lygčių sistemą ir randame x ir y:

$$\begin{cases} x + y = 140, \\ 0{,}05x + 0{,}4y = 140 \cdot 0{,}3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 140, \\ 0{,}05x + 0{,}4y = 42 \quad |: 0{,}05. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 140, \\ x + 8y = 840. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 140 - y, \\ 140 - y + 8y = 840. \end{cases}$$

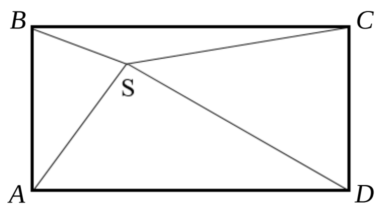
$7y = 700,\ y = 100.$

$x = 40.$

Atsakymas: paimta 40 gramų 5% koncentracijos tirpalo ir 100 gramų – 40% koncentracijos tirpalo.

---

5. Stačiakampio formos sklype įrengtas vandentiekio stovas, nutolęs nuo sklypo kampų 30 m, 45 m ir 75 m.
Raskite atstumą nuo stovo iki ketvirtojo sklypo kampo.



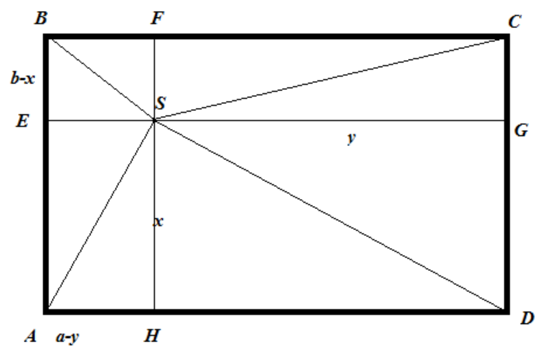
Sprendimas. Per tašką S nubrėžkime statmenis FH ir EG į stačiakampio kraštines, duotąjį stačiakampį padalindami į keturis stačiakampius.

Pažymėkime stačiakampio kraštines raidėmis: $AD = a$, $AB = b$, o statmenis $SH = x$, $SG = y$.

Tada $HD = y$, $AH = BF = a - y$, $BE = FS = CG = b - x$.

Pagal Pitagoro teoremą (iš stataus trikampio DSH):

$$SD^2 = x^2 + y^2. \qquad (1)$$



1. Tarkime, kad $AS = 45$ m, $BS = 30$ m, $CS = 75$ m.

Reikia rasti SD.

Iš stataus trikampio ASH: $SA^2 = x^2 + (a - y)^2 = 45^2$. (2)

Iš stataus trikampio GSC: $SC^2 = (b - x)^2 + y^2 = 75^2$. (3)

Iš stataus trikampio FSB: $SB^2 = (b - x)^2 + (a - y)^2 = 30^2$. (4)

Iš gautos trijų lygčių sistemos reikia rasti nežinomąjį x^2+y^2.

Sudėję antrąją ir trečiąją lygybes, gauname: $x^2 + y^2 + (b - x)^2 + (a - y)^2 = 75^2 + 45^2$. Atėmę ketvirtąją lygybę, randame, jog $x^2 + y^2 = 75^2 + 45^2 - 30^2$.

Taigi, $x^2 + y^2 = 6750$, $SD = \sqrt{6750} \approx 82$ (m).

2. Jeigu tartume, kad atstumas $SD = 75$ m ir ieškotume stovo S atstumo iki kampo C, esančio prieš kampą A, tuomet analogiškai pirmajam atvejui gautume, kad $SC^2 = 75^2 + 30^2 - 45^2 = 4500$.
Vadinasi, $SC \approx 67$ m.

Pastaba. Jei tartume, kad $AS = 30$ m, $CS = 45$ m, $DS = 75$ m, o ieškome atstumo iki kampo B, esančio prieš labiausiai nutolusį kampą D, analogiškai pirmajam atvejui gautume, kad

$$SB^2 = 30^2 + 45^2 - 75^2 = 2700,$$

ko negali būti.

Atsakymas: ≈ 82 *m*; ≈ 67 *m*.