1. Su kokiomis parametro a reikšmėmis lygtis

$$x^4 - 2x^2 + a(7\cos x - 2x^2) + 7a^2 = 0$$

turi vienintelį sprendinį?

Sprendimas. Tegu x_0 – lygties sprendinys. Kadangi lygties kairioji pusė yra lyginė funkcija, tai ir $-x_0$ taip pat yra lygties sprendinys. Vadinasi, $x_0 = 0$.
Kai $x = 0$, turime

$$7a + 7a^2 = 0,$$
$$7a(1 + a) = 0.$$

Galimos parametro a reikšmės: 0 ir -1.
Tikriname $a = 0$.

$$x^4 - 2x^2 = 0,$$
$$x^2(x^2 - 2) = 0.$$

Gauname tris sprendinius: $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{2}$. Vadinasi, $a = 0$ netinka.
Tikriname $a = -1$.

$$x^4 - 2x^2 - (7\cos x - 2x^2) + 7 = 0,$$
$$x^4 + 7 = 7\cos x.$$

$x^4 + 7 \geq 7$, o $7\cos x \leq 7$. Lygtis turės sprendinį tik tada, kai

$$\begin{cases} x^4 + 7 = 7, \\ 7\cos x = 7; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^4 = 0, \\ \cos x = 1. \end{cases}$$

Sistema turi tik vieną sprendinį $x = 0$.

Atsakymas. $a = -1$.

2. Apskaičiuokite sumą
$$1^2 + 2^2 - 3^2 - 4^2 + 5^2 + 6^2 - 7^2 - 8^2 + 9^2 + \cdots + 2018^2 - 2019^2 - 2020^2 + 2021^2 + 2022^2.$$

Sprendimas. Pasinaudoję išraiškomis
$$\begin{aligned} &k^2, \\ &(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1, \\ &(k+2)^2 = k^2 + 4k + 4, \\ &(k+3)^2 = k^2 + 6k + 9, \end{aligned}$$
turime $k^2 - (k+1)^2 - (k+2)^2 + (k+3)^2 = 4$.
Suskliaudę atitinkamus gretimus duotos sumos narius
$$1^2 + (2^2 - 3^2 - 4^2 + 5^2) + (6^2 - 7^2 - 8^2 + 9^2) + (10^2 - 11^2 - 12^2 + 13^2) + \cdots + \\ +(2018^2 - 2019^2 - 2020^2 + 2021^2) + 2022^2$$
taip pat galime pastebėti, kad kiekvienuose skliausteliuose esančio reiškinio reikšmė lygi 4. Iš viso tokių skliaustelių yra $(2021 - 1) : 4 = 505$.
Vadinasi,
$$1^2 + (2^2 - 3^2 - 4^2 + 5^2) + (6^2 - 7^2 - 8^2 + 9^2) + (10^2 - 11^2 - 12^2 + 13^2) + \cdots + \\ +(2018^2 - 2019^2 - 2020^2 + 2021^2) + 2022^2 = 1 + 505 \cdot 4 + 2022^2 = \\ = 1 + 2020 + 2022^2 = 2021 + 2022^2 = 4090505.$$

Atsakymas. 4090505.

3. Apskaičiuokite geometrinės progresijos $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} + \cdots$ narių sumą, kur a_1 yra funkcijos $y = (6x^2 - x^3 - 16)/8$ didžiausia reikšmė intervale $[1; 5]$, o progresijos vardiklis $q = \lim_{x\to 0}(1 - \cos x)/x^2$.

<u>Sprendimas.</u> Pagal tai, kad $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ ir $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$, gauname

$$q = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Randame funkcijos $y = \frac{1}{8}(6x^2 - x^3 - 16)$ didžiausią reikšmę intervale $[1; 5]$:

$$y' = \frac{1}{8}(12x - 3x^2) = \frac{3}{8}x(4 - x);$$

$$\frac{3}{8}x(4-x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \qquad x_2 = 4.$$

Kai $x = 1$, $y' = 1\frac{1}{8}$. Vadinasi, intervale $(0; 4)$ funkcija didėja.
Kai $x = 5$, $y' = -1\frac{7}{8}$. Vadinasi, intervale $(4; +\infty)$ funkcija mažėja.
Iš to seka, kad funkcija $y = \frac{1}{8}(6x^2 - x^3 - 16)$ įgyja didžiausią reikšmę intervale $[1; 5]$, kai $x = 4$. Taigi, $a_1 = y(4) = \frac{1}{8}(6\cdot 4^2 - 4^3 - 16) = 2$.
Kadangi turime nykstamąją geometrinę progresiją ($q = \frac{1}{2} < 1$), jos narių suma

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} + \cdots = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = 4.$$

<u>Atsakymas.</u> 4.

4. Keli žmonės sėdi ratu taip, kad kiekvienas turi po vieną kaimyną iš kairės ir iš dešinės. Kiekvienas iš sėdinčiųjų turi po tam tikrą skaičių monetų. Pirmasis turi viena moneta daugiau negu antrasis, antrasis – viena moneta daugiau negu trečiasis ir t. t. Pirmas iš sėdinčiųjų atiduoda vieną monetą antrajam, antrasis – dvi monetas trečiajam ir t. t. Kiekvienas kitam šalia sėdinčiam žmogui atiduoda viena moneta daugiau negu pats gauna tol, kol tai įmanoma. Žaidimo pabaigoje vienas iš sėdinčiųjų turi 4 kartus daugiau monetų negu jo kaimynas. Kiek iš viso buvo žmonių ir kiek monetų turėjo pats neturtingiausias iš jų žaidimo pradžioje?

Sprendimas. Tegu m – žmonių skaičius, k – paties neturtingiausiojo turimų monetų skaičius žaidimo pradžioje. Vadinasi, žaidimo pradžioje pirmasis dalyvis turi $k+m-1$ monetų. Po pirmo turo kiekvienas žaidimo dalyvis atiduoda po 1 monetą, o susikaupusi suma, paskutinio žaidėjo perduodama pirmajam, yra m monetų. Atitinkamai po k turų kiekvienam dalyviui lieka po k monetų mažiau, paskutinis dalyvis nebeturi nė vienos monetos, o suma, jo perduodama pirmajam žaidėjui, mk monetų. Žaidimas baigiasi $k+1$ turo metu, kai „keliaujanti kasa“ pasiekia paskutinį žaidėją, kuris nebeturi kuo ją papildyti. Tuo momentu „kasoje“ (ir paskutinio žaidėjo rankose) bus $mk+(m-1)$ monetų, priešpaskutinis žaidėjas nebeturės nė vienos monetos, o pirmasis turės $k+m-1-(k+1)=m-2$ monetų.
Aišku, kad vienintelė žaidėjų pora, kurių žaidimo pabaigoje turimų monetų santykis būtų 4:1, yra pirmasis ir paskutinysis žaidėjai. Vadinasi,

$$mk+m-1=4(m-2) \qquad \text{arba} \qquad 4(mk+m-1)=m-2.$$

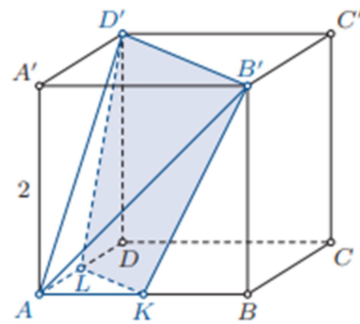
$$mk=3m-7 \qquad\qquad 4mk=2-3m$$

$$k=3-\frac{7}{m} \qquad\qquad k=\frac{1}{2m}-\frac{3}{4}.$$

Akivaizdu, kad pirmoji lygybė bus teisinga (pagal sąlygą sprendiniai turi būti natūralieji skaičiai) tik tada, kai $m=7$. Tuomet $k=2$. Antroji lygybė sveikųjų teigiamų sprendinių neturi.

Atsakymas. 7 žmonės, 2 monetos.

5. Kubo $ABCDA'B'C'D'$ kraštinė lygi 2. Taškai *K* ir *L* yra kraštinių *AB* ir *AD* vidurio taškai. Apskaičiuokite keturkampio $KLD'B'$ plotą.



<u>*Sprendimas.*</u> LK ir $D'B'$ lygiagrečios DB, todėl jos lygiagrečios tarpusavyje. $LD' = KB'$ (iš lygių trikampių). Keturkampis $KLD'B'$ yra lygiašonė trapecija, kurios pagrindų ilgiai randami taikant Pitagoro teoremą:

$$KL = \sqrt{AK^2 + AL^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2};$$
$$B'D' = \sqrt{A'B'^2 + A'D'^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}.$$

Trapecijos aukštinė *KH* randama iš stačių trikampių KBB' ir KHB', bei pritaikius lygiašonės trapecijos savybes:

$$KB' = \sqrt{KB^2 + BB'^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5};$$
$$HB' = \frac{B'D' - KL}{2} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$
$$KH = \sqrt{KB'^2 - HB'^2} = \sqrt{5 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Tuomet keturkampio $KLD'B'$ plotas bus

$$S = \frac{KL + B'D'}{2} \cdot KH = \frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = 4{,}5.$$

<u>*Atsakymas.*</u> 4,5.

<u>**Pastaba.**</u> Galimi ir kitokie uždavinių sprendimo būdai.