1. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\dfrac{1}{c}, \\ \dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{a}, \\ \dfrac{z}{c}+\dfrac{x}{a}=\dfrac{1}{b}. \end{cases}$$

Sprendimas. Sudėję visas lygtis ir padalinę iš 2 gauname

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Iš šios lygties atimame kiekvieną sistemos lygtį:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}-\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{2c}-\dfrac{1}{c}, \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}-\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{2c}-\dfrac{1}{a}, \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}-\dfrac{z}{c}-\dfrac{x}{a}=\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{2c}-\dfrac{1}{b}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2b}-\dfrac{1}{2c}, \\ \dfrac{x}{a}=\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{2c}-\dfrac{1}{2a}, \\ \dfrac{y}{b}=\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2c}-\dfrac{1}{2b}. \end{cases}$$

Kai $abc=0$, sistema sprendinių neturi.

Kai $abc \neq 0$,

$$\begin{cases} z=\dfrac{c}{2a}+\dfrac{c}{2b}-\dfrac{1}{2}, \\ x=\dfrac{a}{2b}+\dfrac{a}{2c}-\dfrac{1}{2}, \\ y=\dfrac{b}{2a}+\dfrac{b}{2c}-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Atsakymas. $\emptyset$, kai $abc=0$; $\left(\frac{a}{2b}+\frac{a}{2c}-\frac{1}{2};\ \frac{b}{2a}+\frac{b}{2c}-\frac{1}{2};\ \frac{c}{2a}+\frac{c}{2b}-\frac{1}{2}\right)$, kai $abc \neq 0$.

2. Raskite visus galimus natūraliuosius skaičius *m* ir *n*, tenkinančius lygybę $n^2 + 615 = 2^m$.

Sprendimas. Jeigu *n* dalus iš 3, tai ir $n^2 + 615$ dalus iš 3, nes $615 = 205 \cdot 3$, o taip būti negali, nes dešinėje lygybės pusėje yra tik dvejeto laipsniai. Vadinasi, *n* nėra dalus iš 3 ir $n^2 + 615$ dalybos iš 3 liekana lygi 1. Tada

$$2^m - n^2 = 615, \text{ t. y. } \left(2^{m/2} - n\right)\left(2^{m/2} + n\right) = 615.$$

615 išskaidyti daugikliais galima taip:

$$615 = 1 \cdot 615 = 3 \cdot 205 = 5 \cdot 123 = 15 \cdot 41.$$

Daugiklių suma yra dvejeto laipsnis tik vienu atveju, todėl:

$$2^{m/2} - n = 5 \quad \text{ir} \quad 2^{m/2} + n = 123.$$

Tada

$$m = 12, \; n = 59.$$

Atsakymas. $m = 12, \; n = 59$.

---

3. Iš miesto A į miestą B, esantį už 120 km, mopedu išvyko kurjeris. Po 1 valandos iš miesto A motociklu išvažiavo antras kurjeris, kuris, pasivijęs pirmąjį ir perdavęs jam siuntinį, nedelsdamas tuo pačiu greičiu pajudėjo atgal ir grįžo į miestą A tuo pačiu momentu, kai pirmasis kurjeris pasiekė miestą B. Koks pirmojo kurjerio greitis, jeigu antrojo greitis – 50 km/h?

Sprendimas. Tegu v_1 – pirmojo kurjerio greitis, $v_2 = 50$ km/h – antrojo kurjerio greitis, o *s* – atstumas, kurį nuvažiavo abu kurjeriai iki jų susitikimo momento. Tada *s* km atstumui įveikti pirmasis kurjeris sugaišo $\frac{s}{v_1}$ h, o antrasis – $\frac{s}{v_2}$ h, arba viena valanda trumpiau nei pirmasis, t. y. $\frac{s}{v_1} = \frac{s}{v_2} + 1$.

Po susitikimo pirmasis kurjeris nuvažiavo $(120 - s)$ km, o antrasis per tą patį laiką vėl *s* km. Taigi,

$$\frac{120 - s}{v_1} = \frac{s}{v_2}.$$

Norėdami rasti pirmojo kurjerio greitį v_1 sprendžiame lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \dfrac{s}{v_1} = \dfrac{s}{50} + 1, \\ \dfrac{120 - s}{v_1} = \dfrac{s}{50}; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 50s = sv_1 + 50v_1, \\ 6000 - 50s = sv_1; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s = \dfrac{50v_1}{50 - v_1}, \\ 6000 - 50 \cdot \dfrac{50v_1}{50 - v_1} = \dfrac{50v_1}{50 - v_1} \cdot v_1. \end{cases}$$

Sprendžiame antrąją sistemos lygtį:

$$120 - \frac{50v_1}{50 - v_1} - \frac{v_1^2}{50 - v_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad 6000 - 120v_1 - 50v_1 - v_1^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$v_1^2 + 170v_1 - 6000 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$v_1 = -200 \text{ (netinka pagal sąlygą)} \quad \text{arba} \quad v_1 = 30.$$

Atsakymas. 30 km/h.

---

4. Keli žmonės sėdi ratu taip, kad kiekvienas turi po vieną kaimyną iš kairės ir iš dešinės. Kiekvienas iš sėdinčiųjų turi po tam tikrą skaičių monetų. Pirmasis turi viena moneta daugiau negu antrasis, antrasis – viena moneta daugiau negu trečiasis ir t. t. Pirmas iš sėdinčiųjų atiduoda vieną monetą antrajam, antrasis – dvi monetas trečiajam ir t. t. Kiekvienas kitam šalia sėdinčiam žmogui atiduoda viena moneta daugiau negu pats gauna tol, kol tai įmanoma. Žaidimo pabaigoje vienas iš sėdinčiųjų turi 4 kartus daugiau monetų negu jo kaimynas. Kiek iš viso buvo žmonių ir kiek monetų turėjo pats neturtingiausias iš jų žaidimo pradžioje?

Sprendimas. Tegu m – žmonių skaičius, k – paties neturtingiausiojo turimų monetų skaičius žaidimo pradžioje. Vadinasi, žaidimo pradžioje pirmasis dalyvis turi $k+m-1$ monetų. Po pirmo turo kiekvienas žaidimo dalyvis atiduoda po 1 monetą, o susikaupusi suma, paskutinio žaidėjo perduodama pirmajam, yra m monetų. Atitinkamai po k turų kiekvienam dalyviui lieka po k monetų mažiau, paskutinis dalyvis nebeturi nė vienos monetos, o suma, jo perduodama pirmajam žaidėjui, mk monetų. Žaidimas baigiasi $k+1$ turo metu, kai „keliaujanti kasa“ pasiekia paskutinį žaidėją, kuris nebeturi kuo ją papildyti. Tuo momentu „kasoje“ (ir paskutinio žaidėjo rankose) bus $mk+(m-1)$ monetų, priešpaskutinis žaidėjas nebeturės nė vienos monetos, o pirmasis turės $k+m-1-(k+1)=m-2$ monetų.
Aišku, kad vienintelė žaidėjų pora, kurių žaidimo pabaigoje turimų monetų santykis būtų 4:1, yra pirmasis ir paskutinysis žaidėjai. Vadinasi,

$$mk+m-1=4(m-2) \quad \text{arba} \quad 4(mk+m-1)=m-2.$$

$$mk=3m-7 \qquad 4mk=2-3m$$

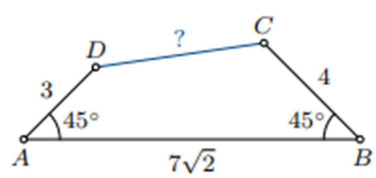
$$k=3-\frac{7}{m} \qquad k=\frac{1}{2m}-\frac{3}{4}.$$

Akivaizdu, kad pirmoji lygybė bus teisinga (pagal sąlygą sprendiniai turi būti natūralieji skaičiai) tik tada, kai $m=7$. Tuomet $k=2$. Antroji lygybė sveikųjų teigiamų sprendinių neturi.

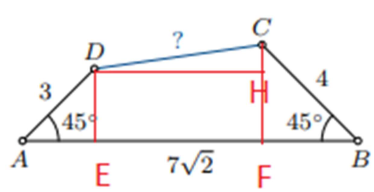
Atsakymas. 7 žmonės, 2 monetos.

---

5. Duotas keturkampis $ABCD$, kuriame $\angle DAB=\angle ABC$, kraštinės $AD=3$, $BC=4$, $AB=7\sqrt{2}$. Apskaičiuokite kraštinės DC ilgį.



Sprendimas. Išvedame aukštines DE ir CF. Gauti trikampiai ADE ir CBF bus statieji ir lygiašoniai, todėl $DE=AE=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $CF=BF=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$. Galime suformuoti statųjį trikampį DHC, kuriame $DH=7\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}-2\sqrt{2}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$, $CH=CF-DE=2\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Pagal Pitagoro teoremą randame, kad $DC=5$.



Atsakymas. 5.

Pastaba. Galimi ir kitokie uždavinių sprendimo būdai.