Jaunųjų matematikų varžybos
Vilniaus universiteto Šiaulių akademija
2022-02-26

Uždavinių sprendimai

II (10) klasė

1. Du tarpusavyje nelygūs realieji skaičiai x ir y yra tokie, kad $x^2 - 2022x = y^2 - 2022y$. Kam yra lygi skaičių x ir y suma?

Sprendimas. Lygtyje $x^2 - 2022x = y^2 - 2022y$ atlikę elementariuosius pertvarkius gauname, kad $x^2 - y^2 = 2022x - 2022y$, arba $(x+y)(x-y) = 2022(x-y)$. Kadangi $x \neq y$, todėl suprastinę iš $x - y$ turime, kad $x + y = 2022$.

Atsakymas: 2022.

2. Tegul $f(x) = x^2 + 3x + 2$. Apskaičiuokite

$$\left(1-\frac{2}{f(1)}\right)\left(1-\frac{2}{f(2)}\right)\left(1-\frac{2}{f(3)}\right)\dots\left(1-\frac{2}{f(2022)}\right).$$

Sprendimas. Bet kokiam n

$$1-\frac{2}{f(n)} = 1-\frac{2}{n^2+3n+2} = \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}.$$

Todėl

$$\left(1-\frac{2}{f(1)}\right)\left(1-\frac{2}{f(2)}\right)\left(1-\frac{2}{f(3)}\right)\dots\left(1-\frac{2}{f(2022)}\right) =$$

$$= \frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}\cdot\frac{3\cdot 6}{4\cdot 5}\cdot\dots\cdot\frac{2021\cdot 2024}{2022\cdot 2023}\cdot\frac{2022\cdot 2025}{2023\cdot 2024} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2025}{2023} = \frac{2025}{6069} = \frac{675}{2023}.$$

Atsakymas: $\frac{675}{2023}$.

3. „Dainų dainelės“ konkurse dalyvavo Gegutė, Lakštingala ir Varna. Kiekvienas vertinimo komisijos narys balsuoja už vieną iš atlikėjų. Vertinimo komisijos pirmininkas Apuokas suskaičiavo, kad vertinimo komisijoje yra 59 nariai. Be to, jis paskelbė, kad Lakštingala ir Varna kartu surinko 15 balsų, Varna ir Gegutė kartu surinko 18 balsų, o Gegutė ir Lakštingala kartu surinko 20 balsų. Kadangi Apuokui matematika mokykloje nesisekė, todėl jis skaičiuoja blogai: kiekvienas iš jo paminėtų keturių skaičių skiriasi nuo tikrojo ne daugiau kaip 13. Kiek balsų gavo Varna?

Sprendimas. Tegul g yra Gegutės surinktų balsų skaičius, l – Lakštingalos surinktų balsų skaičius, v – Varnos surinktų balsų skaičius, o k – komisijos narių skaičius. Akivaizdu, kad $g + l + v = k$. Nagrinėkime poromis surinktų balų sumas:

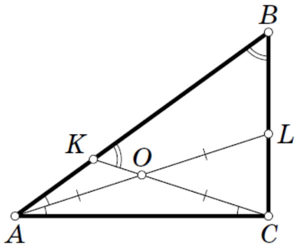
$$\begin{cases} l + v \leq 28, \\ v + g \leq 31, \\ g + l \leq 33. \end{cases}$$

Sudėję šias nelygybes turime, kad $2(g + l + v) \leq 92$, arba $k \leq 46$. Iš kitos pusės, $46 \leq k \leq 72$. Vadinasi, $k = 46$, o $l + v = 28$, $v + g = 31$, $g + l = 33$. Todėl $v = k - (g + l) = 46 - 33 = 13$.

Atsakymas: 13 balsų.

4. Stačiojo trikampio ABC įžambinėje AB pažymėtas taškas K taip, kad $CK = BC$. Atkarpa CK dalija pusiaukampinę AL į dvi lygias dalis. Raskite kampų A ir B didumą.

Sprendimas: Atkarpų CK ir AL susikirtimo tašką pažymėkime O (žiūrėkite brėžinį).



Pastebime, kad OC yra stačiojo trikampio ACL pusiaukraštinė nubrėžta į įžambinę. Vadinasi, $AO = OL = OC$ ir $\angle BAL = \angle LAC = \angle ACK = \alpha$. Tada $\angle A = 2\alpha$.

Raskime $\angle B$. Trikampis BCK – lygiašonis, o $\angle B = \angle BKC = 180° - \angle AKC = 180° - (180° - 2\alpha - \alpha) = 3\alpha$.

Kadangi $\angle A + \angle B = 90°$, tai $2\alpha + 3\alpha = 90°$, arba $\alpha = 18°$. Tuomet $\angle A = 36°$, o $\angle B = 54°$.

Atsakymas: $\angle A = 36°$, $\angle B = 54°$.

5. **Išspręskite lygčių sistemą:**

$$\begin{cases} \boldsymbol{xy - 2y = x + 106}, \\ \boldsymbol{yz + 3y = z + 39}, \\ \boldsymbol{zx + 3x = 2z + 438}. \end{cases}$$

Sprendimas: Iš pirmosios lygties akivaizdžiai matome, kad $y \neq 1$. Todėl iš pirmosios lygties gauname, kad $x = \frac{106+2y}{y-1}$, o iš antrosios, kad $z = \frac{39-3y}{y-1}$. Šias išraiškas įrašę į trečiąją lygtį ir atlikę elementariuosius pertvarkius gauname, kad $-432y^2 + 864y + 3456 = 0$. Arba $-432(y-4)(y+2) = 0$. Jei $y = -2$, tai $x = -34$, $z = -15$. Jei $y = 4$, tai $x = 38$, $z = 9$.

Atsakymas: (-34; -2;. -15), (38; 4; 9).